

ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ

Том 16 № 4 (62) 2016

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

*МАТЕМАТИКАЛЫҚ ЖУРНАЛ*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

*MATHEMATICAL JOURNAL*

Том 16 № 4 (62) 2016

Институт математики и математического моделирования  
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, № 4 (62), 2016

Номер посвящается 80-летию академика НАН РК У.М. Султангазина

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

*Главный редактор: М.А. Садыбеков*

*Заместитель главного редактора: А.Т. Асанова*

*Ответственная за выпуск: Л.А. Алексеева*

*Редакционная коллегия:*

Л.А. Алексеева, Д.Б. Базарханов, Б.С. Байжанов, Г.И. Бижанова, Н.К. Блиев,  
В.Г. Воинов, Н.С. Даирбеков, М.Т. Дженалиев, Д.С. Джумабаев,  
А.С. Джумадильдаев, Т.Ш. Кальменов, К.Т. Мынбаев, А.Ж. Найманова,  
М. Отелбаев, И.Н. Панкратова, М.Г. Перетятыкин, И.А. Тайманов (Россия),  
М.И. Тлеубергенов, С.Н. Харин.

*Ответственный секретарь: Ж.К. Джобулаева*

*Адрес редакции:*

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, <http://www.math.kz>

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

© Институт математики и математического моделирования МОН РК, 2016 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 16

№ 4 (62)

2016

---

---

<i>Султангазин Умирзак Махмутович</i> (к 80-летию со дня рождения) .....	7
<i>Международная научная конференция "Математические методы и современные космические технологии"</i> .....	13
<i>Акыш А.Ш.</i> Методы функции Ляпунова для некоторых дискретных моделей уравнения Больцмана .....	16
<i>Алексеева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Сулеев Т.А.</i> 3D-модель наноспутника "Политех-1" и расчет его физико-механических параметров с использованием ПО "SolidWorks" ..	31
<i>Ахмедов Д.Ш., Богуспаев Н.Б., Раскалиев А.С., Аверьянов А.А.</i> Имитационное моделирование одноканального коррелятора приемника GPS на базе технологии SDR ..	42
<i>Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.</i> Об однородной параболической задаче в бесконечной угловой области .....	60
<i>Джумабаев Д.С., Темешева С.М., Утешова Р.Е.</i> Об аппроксимации задачи нахождения ограниченного решения системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с существенными особенностями на концах конечного интервала .....	77
<i>Жилисбаева К.С., Саспаева А.Д.</i> Об асимптотической устойчивости программного движения космического аппарата .....	86
<i>Жумабек Т.М., Минглибаев М.Дж.</i> Об одном частном случае плоской ограниченной задачи трех тел .....	99
<i>Иванов К.С., Тулекенова Д.Т.</i> Адаптивный привод для космической техники-привод солнечных батарей .....	121
<i>Kairatkyzy D., Mukasheva S.N., Toyshiev N.S.</i> Features of diurnal variations of the total electron content in the years of maximum and minimum solar activity .....	130
<i>Мартынов Н.И., Рамазанова М.А.</i> Статические краевые задачи плоской теории упругости неоднородной анизотропной среды .....	140
<i>Минасянц Г.С., Минасянц Т.М., Томозов В.М.</i> Свойства потоков галактических космических лучей в период минимума солнечной активности .....	153
<i>Peretyat'kin M.G.</i> Invertible multi-dimensional interpretations versus virtual isomorphisms of first-order theories .....	166

<i>Сералиев А.М., Хасанов Э.Р.</i> Соответствие пространственного расположения районов глубокофокусной сейсмичности и экстремальных значений в вековых вариациях углов геомагнитного наклона .....	204
<i>Суйменбаев Б.Т., Алексева Л.А., Суйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р.</i> Компьютерное моделирование управления движением КА в гравимагнитном поле Земли в системе Matlab-Simulink .....	213
<i>Темирбекова Л.Н.</i> Параллельные алгоритмы решения многомерных коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений .....	232
<i>Тойшиев Н.С., Калдыбаев А.А., Нуракынов С.М.</i> Сильные ( $M \geq 7.0$ ) землетрясения на территории Альпийско-Гималайского орогенного пояса: связь с вариациями солнечной активности .....	239
<i>Турметов Б.Х., Абдуллаев Ж.</i> Операторный метод решения одного класса линейных дифференциальных уравнений дробного порядка .....	246
<i>Хайруллин Е.М., Наукенова М.Д.</i> О разрешимости одной граничной задачи для параболического интегро-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом	259
<i>Хачикян Г.Я., Кайраткызы Д., Андреев А.Б.</i> Долговременные тренды в вариациях продолжительности земных суток и частоты возникновения на планете землетрясений	270
<i>Цычуева Н.Ю., Акназарова Р.Б., Малахов Д.В., Витковская И.С.</i> Мониторинг природных биоопасностей с использованием данных дистанционного зондирования Земли	279
<i>Джаугаштин Казбек Есенжанович</i> (к 80-летию со дня рождения) .....	291

---

Сүйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Сүйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р. ЖЕРДІҢ ГРАВИМАГНИТТІК ӨРІСІНДЕГІ ҒА ҚОЗҒАЛЫСЫН БАСҚАРУДЫ MATLAB-SIMULINK ЖҮЙЕСІНДЕ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛДЕУ

Зерттеу нысаны Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университетінің ұшуды қару орталығының (ҰБО) студенттік базасында "Политех-1" наносерігін басқарудың бортық жүйесін математикалық модельдеуі болып табылады. Осы жұмыста Жердің гравимагниттік өрісінде абсолютті қатты дененің моделін пайдалана отырып наносеріктің динамикасы мен басқаруын Matlab Simulink жүйесінде математикалық модельдеу нәтижелері келтіріледі, ол басты екі кезеңге бөлінеді: гравитациялық өрістегі наносеріктің массалар орталығының үдемелі қозғалысының механикасын және оның массалар орталығының маңайындағы, гравитациялық және магниттік күштердің, әрі осы серіктің магниттелгендігінің әсерін ескере отырып, өзіндік айналмалы қозғалысын моделдеу. Математикалық модель мен ҒА Жердің гравимагниттік өрісіндегі қозғалысының магниттік дипольмен ((WMM 2010) Жердің стандарттық моделі) моделденген моментін басқару жүйесі программалық тұрғыдан жүзеге асырылған. Орбиталдық ортаның елі ктегіші жасалған, оның құрама блоктары сипатталған. Жасалған модель негізінде наносеріктің орбиталдық қозғалысының көп нұсқалы есептемелері "Политех-1" ғылыми-білім беру наносерігінің параметрлеріне жақын есептік физикалық-механикалық параметрлерімен бірге жасалған.

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ  
МНОГОМЕРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ  
ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Л.Н. ТЕМИРБЕКОВА

Казахский национальный университет имени аль-Фараби  
050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71, e-mail: laura-nurlan@mail.ru

Аннотация: Для решения двумерной коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения рассмотрены параллельные прямые и итерационные алгоритмы.

Ключевые слова: Параллельные алгоритмы, двумерные коэффициентные обратные задачи, метод регуляризации, метод сопряженных градиентов, метод квадратного корня, дискретизация, численное решение.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается двумерная обратная задача восстановления коэффициента для гиперболического уравнения. Известно, что для решения такого рода обратной задачи используется двумерный метод Гельфанда-Левитана для нахождения коэффициента. Двумерное уравнение Гельфанда-Левитана имеет вид двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. При разработке методов решения задач используются идеи итеративной регуляризации [1].

В качестве примера можно рассмотреть структурные обратные задачи гравиметрии [2], которые сводятся к решению двумерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Уравнения гравиметрии и магнитометрии являются существенно некорректными задачами, решение которых обладает сильной чувствительностью к погрешностям правых частей,

---

Keywords: *Parallel algorithms, two-dimensional coefficient inverse problem, regularization method, conjugate gradient method, square-root method, discretization, numerical solution.*

2010 Mathematics Subject Classification: 65M32.

Funding: 1746/ГФ4 проекта "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

© Л.Н. Темирбекова, 2016.

полученных в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

Для решения двумерной коэффициентной обратной задачи гиперболического типа предложены и численно реализованы параллельные прямые и итерационные алгоритмы. Решены задачи с данными и проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов.

## 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим следующее семейство прямых задач [3]:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} + q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad k \in Z, \quad (1)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \quad (2)$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}. \quad (3)$$

Предполагаем, что след решения прямой задачи (1)–(3) существует и может быть измерен. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию  $q(x, y)$  по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)–(3):

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t > 0, \quad k \in Z, \quad (4)$$

где  $R$  – множество вещественных чисел,  $Z$  – множество всех целых чисел,  $\delta$  – дельта-функция Дирака,  $k$  – некоторое фиксированное целое число,  $h(y) = e^{iky}$ . Обобщенное решение прямой задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывным решением интегрального уравнения

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2}\theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y)u^{(k)}(\xi, y, \tau)d\xi d\tau. \quad (5)$$

Здесь  $\theta(t)$  тэта – функция Хэвисайда. Так же известно, что

$$u^{(k)}(x, y, |x|) = \frac{h(y)}{2}. \quad (6)$$



Таким образом, для решения прямой задачи в классе обобщенных функций имеем задачу Гурса (1), (6), решение которой определяет классическое решение задачи (1)–(3) [3]. Вводится последовательность вспомогательных прямых задач [3]:

$$\omega_{tt}^{(m)} = \omega_{xx}^{(m)} + \omega_{yy}^{(m)} + q(x, y)\omega^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

$$\omega^{(m)}(0, y, t) = e^{imy}\delta(t), \quad \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (8)$$

$$u^{(m)}|_{y=\pi} = u^{(m)}|_{y=-\pi}. \quad (9)$$

Задача Коши (7)–(9) с данными на времениподобной поверхности не является корректно-поставленной в классе функций конечной гладкости. Однако, возможно доказать однозначную разрешимость обратной задачи, используя подход Л. Гиренберга, Л. Овсянникова.

Решение задачи (7)–(9) по формуле Даламбера имеет следующий вид:

$$\omega^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,y,t)} q(\xi, y)\omega(\xi, y, \tau)d\xi d\tau, \quad (10)$$

где

$$\Delta(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : 0 < \xi \leq x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi\}$$

– треугольник, образованный характеристиками, проходящими через точку  $(x, y, t)$ , и осью  $t$ .

Нетрудно показать, что

$$\omega^{(m)}(x, y, t) \equiv 0, \quad 0 < x < |t|. \quad (11)$$

Поэтому фактической областью интегрирования в уравнении (10) для точек  $(x, y, t) \in D = \{(x, y, t) : x \geq |t|\}$  будут прямоугольники  $\Delta(x, y, t) \in D = \{(x, y, t) : |\tau| \leq \xi \leq x - |t - \tau|\}$ , образованные характеристиками, выходящими из точек  $(0, y, 0)$ ,  $(x, y, t)$ .

Обозначим

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = \omega^{(m)}(x, y, t) - \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x-t) + \delta(x+t)]. \quad (12)$$

Кусочно-непрерывная функция  $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t)$  есть решение уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = & \frac{h(y)}{4} \theta(x - |t|) \left[ \int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi \right] + \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) \tilde{\omega}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Чтобы вычислить  $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, x - 0)$ , в (13) надо положить  $t = x$ , тогда

$$\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi = 0$$

и

$$\iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) \tilde{\omega}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau = 0,$$

т.к.  $\Delta(x, y, t)$  превращается в отрезок при каждом фиксированном  $y$ .

Таким образом,

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, x - 0) = \frac{h(y)}{4} \int_0^x q(\xi, y) d\xi, \quad x > 0. \quad (14)$$

Продолжим нечетным образом функции  $u^{(k)}(x, y, t)$  и  $f^{(k)}(y, t)$  по переменной  $t$ .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, t) &= \int_R f^{(k)}(y, s) \omega^{(m)}(x, y, t - s) ds = \\ &= \int_R \left( \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t) e^{imy} \right) \omega^{(m)}(x, y, t - s) ds = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_R \left( \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)e^{imy} \right) \omega^{(m)}(x, y, s) ds = \\ & = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds \end{aligned}$$

при  $x > 0, y \in R$  и  $k \in Z$ . Здесь  $f_m^{(k)}(t)$  – коэффициенты Фурье функции  $f_m^{(k)}(y, t)$  при  $\omega^{(m)} = e^{imy}\delta(t)$ :

$$\begin{aligned} u^{(k)}(0, y, t) &= \int_R f^{(k)}(y, s) \omega^{(m)}(0, y, s) ds = \int_R f^{(k)}(y, s) e^{imy} \delta(t-s) ds = \\ &= \int_R \left( \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(s) e^{imy} \right) e^{imy} \delta(t-s) ds = \int_R f_m^{(k)}(s) \delta(t-s) ds = f_m^{(k)}. \end{aligned}$$

В уравнении (1) обратной задачи (1)–(4) выражение  $q \cdot u$  запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} q \cdot u &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ijy}, \\ q(x, y) \cdot u^k(x, y, t) &= \int_R \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(t) e^{ijy} \right) \omega^{(m)}(x, y, t-s) ds = \\ &= \int_R \sum_{m=1}^{\infty} b_j(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds. \end{aligned}$$

Решение задачи (1), (4) может быть представлено в виде

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds. \quad (15)$$

Используя (6), получим

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \{ e^{imy} (\delta(x+t) + \delta(x-t)) \} + \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds.$$

Преобразуем формулу (15):

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left[ f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x) \right] + \int_{-x}^x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds.$$

При  $x > |t|$  имеем

$$\frac{1}{2} \left[ f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x) \right] + \int_{-x}^x \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds = 0. \quad (16)$$

При каждом фиксированном  $x > 0$  соотношение (16) является интегральным уравнением Гельфанда-Левитана первого рода относительно функции  $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t)$ ,  $t \in (-x, x)$ .

После дискретизации уравнения на сетке и аппроксимации интегрального оператора по квадратурным формулам задача (16) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричной матрицей. Так как уравнение (16) относится к классу некорректно поставленных задач, то СЛАУ, возникающая в результате дискретизации уравнения, является плохо обусловленной и преобразуется к виду

$$f_{\gamma}^{(k)}(\mu E + A^{(k)})\tilde{\omega} = f_{\gamma}^{(k)}$$

где  $\mu$  – параметр регуляризации.

Для решения уравнения (17) используются прямой метод квадратного корня и итерационные методы регуляризации. Численная реализация и распараллеливание итерационных методов и метода квадратного корня для решения двумерной коэффициентной обратной задачи выполнены с помощью библиотеки МРІ на языке Фортран.

*Распараллеливание итерационных методов градиентного типа* [4] основано на разбиении матрицы  $A^{(k)}$  горизонтальными полосами на  $m$  блоков, а вектора решения  $z$  и векторов правой части  $f_{\gamma}^{(k)}$  СЛАУ – на  $m$  частей так, что  $n = m \times L$ , где  $n$  – размерность системы уравнений,  $m$  – число процессоров,  $L$  – число строк матрицы в блоке.

*Распараллеливание метода квадратного корня, предложенного в работе* [5]. Матрица  $A^{(k)}$  разбивается вертикальными линиями на  $m$  блоков.

Диагональные элементы треугольной матрицы  $S$ . Обратный ход метода квадратного корня (нахождения СЛАУ) по рекуррентным формулам также выполняется на одном процессоре.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеринбург: Наука, 1993. – 262 с.
- 2 Акимова Е.Н. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000. // Вестник Нижегород. унив. им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 4. – С. 181-189.
- 3 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сиб. научн. изд. 2009. – 457 с.

*Статья поступила в редакцию 30.09.2016*

Темирбекова Л.Н. ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН КӨП-ӨЛШЕМДІ КОЭФФИЦИЕНТТІК КЕРІ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ ПАРАЛЛЕЛЬ АЛГОРИТМДЕРІ

Гиперболалық теңдеу үшін көпөлшемді коэффициенттік кері есепті шешуге арналған параллель тура және итерациялық алгоритмдер қарастырылған.

Temirbekova L.N. PARALLEL ALGORITHMS FOR SOLVING MULTIDIMENSIONAL COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

In this article we used parallel direct and iterative algorithms to solve two-dimensional coefficient inverse problem for hyperbolic equation.