ISSN 1682—0525

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН**

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й
Ж У Р Н А Л

Том 16 № 4 (62) 2016

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682—0525

Министерство образования и науки Республики Казахстан

М А Т Е М А Т И К А Л Ы Қ Ж У Р Н А Л

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й Ж У Р Н А Л

M A T H E M A T I C A L J O U R N A L

Том 16 № 4 (62) 2016

Институт математики и математического моделирования
Алматы

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Институт математики и математического моделирования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 16, № 4 (62), 2016

Номер посвящается 80-летию академика НАН РК У.М. Султангазина

Журнал выходит 4 раза в год

Издается с 2001 года

Адрес редакции:

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК,

ул. Пушкина, 125, Алматы, 050010,

тел.: 8 (727) 2 72 46 32 (комн. 308), факс: 8 (727) 2 72 70 93,

e-mail: zhurnal@math.kz, mat-zhurnal@mail.ru, http://www.math.kz

Журнал зарегистрирован в Комитете связи, информатизации и информации Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, Свидетельство № 15579-Ж от 25 сентября 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 16 **№ 4 (62)** **2016**

Сүйменбаев Б.Т., Алексеева Л.А., Сүйменбаева Ж.Б., Гусейнов С.Р. ЖЕРДІҢ ГРАВИМАГНИТТІК ӨРІСІНДЕГІ ҒА ҚОЗҒАЛЫСЫН БАСҚАРУДЫ MATLAB-SIMULINK ЖҮЙЕСІНДЕ КОМПЬЮТЕРЛІК МОДЕЛДЕУ

Зерттеу нысаны Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университетінің ұшуды қару орталығының (ҰБО) стендтік базасында "Политех-1" наносерігін басқарудың борттық жүйесін математикалық модельдеуі болып табылады. Осы жұмыста Жердің гравимагниттік өрісінде абсолютті қатты дененің моделін пайдалана отырып наносеріктің динамикасы мен басқаруын Matlab Simulink жүйесінде математикалық модельдеу нәтижелері келтіріледі, ол басты екі кезеңге бөлінеді: гравитациялық өрістегі наносеріктің массалар орталығының үдемелі қозғалысының механикасын және оның массалар орталығының маңайындағы, гравитациялық және магниттік күштердің, әрі осы серіктің магниттелгендігінің әсерін ескере отырып, өзіндік айналмалы қозғалысын моделдеу. Математикалық модель мен ҒА Жердің гравимагниттік өрісіндегі қозғалысының магниттік дипольмен ((WMM 2010) Жердің стандарттық моделі) моделденген моментін басқару жүйесі программалық тұрғыдан жүзеге асырылған. Орбиталдық ортаның елі ктегіші жасалған, оның құрама блоктары сипатталған. Жасалған модель негізінде наносеріктің орбиталдық қозғалысының көп нұсқалы есептемелері "Политех-1" ғылыми-білім беру наносерігінің параметрлеріне жақын есептік физикалық-механикалық параметрлерімен бірге жасалған.

Математический журнал ISSN 1682–0525

2016. — Том 16, № 4. — С. 232–238.

УДК 517.968

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Л.Н. Темирбекова

Казахский национальный университет имени аль-Фараби
050040, Алматы, пр. Аль-Фараби, 71, e-mail: laura-nurlan@mail.ru

Аннотация: Для решения двумерной коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения рассмотрены параллельные прямые и итерационные алгоритмы.

Ключевые слова: Параллельные алгоритмы, двумерные коэффициентные обратные задачи, метод регуляризации, метод сопряженных градиентов, метод квадратного корня, дискретизация, численное решение.

1. Введение

Рассматривается двумерная обратная задача восстановления коэффициента для гиперболического уравнения. Известно, что для решения такого рода обратной задачи используется двумерный метод Гельфанда-Левитана для нахождения коэффициента. Двумерное уравнение Гельфанда-Левитана имеет вид двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. При разработке методов решения задач используются идеи итеративной регуляризации [1].

В качестве примера можно рассмотреть структурные обратные задачи гравиметрии [2], которые сводятся к решению двумерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Уравнения гравиметрии и магнитометрии являются существенно некорректными задачами, решение которых обладает сильной чувствительностью к погрешностям правых частей,

Keywords: *Parallel algorithms, two-dimensional coefficient inverse problem, regularization method, conjugate gradient method, square-root method, discretization, numerical solution.*

2010 Mathematics Subject Classification: 65M32.

Funding: 1746/ГФ4 проекта "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания".

полученных в результате измерений и предварительной обработки геофизических данных.

Для решения двумерной коэффициентной обратной задачи гиперболического типа предложены и численно реализованы параллельные прямые и итерационные алгоритмы. Решены задачи с данными и проведен анализ эффективности и ускорения параллельных алгоритмов.

2. Параллельные алгоритмы решения двумерной коэффициентной обратной задачи гиперболического типа

Рассмотрим следующее семейство прямых задач [3]:

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} + q(x,y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad k \in Z, \tag{1}$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \tag{2}$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}. \tag{3}$$

Предполагаем, что след решения прямой задачи (1)–(3) существует и может быть измерен. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x,y)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1)–(3):

$$u^{(k)}(0,y,t) = f^{(k)}(y,t), \quad y \in [-\pi,\pi], \quad t > 0, \quad k \in Z, \tag{4}$$

где R – множество вещественных чисел, Z – множество всех целых чисел, δ – дельта-функция Дирака, k – некоторое фиксированное целое число, $h(y) = e^{iky}$. Обобщенное решение прямой задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывным решением интегрального уравнения

$$u^{(k)}(x,y,t) = \frac{h(y)}{2}\theta(t-|x|) - \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,y,t)} q(\xi,y)u^{(k)}(\xi,y,\tau)d\xi d\tau. \tag{5}$$

Здесь $\theta(t)$ тэта – функция Хэвисайда. Так же известно, что

$$u^{(k)}(x,y,|x|) = \frac{h(y)}{2}. \tag{6}$$

Таким образом, для решения прямой задачи в классе обобщенных функций имеем задачу Гурса (1), (6), решение которой определяет классическое решение задачи (1)–(3) [3]. Вводится последовательность вспомогательных прямых задач [3]:

$$\omega_{tt}^{(m)} = \omega_{xx}^{(m)} + \omega_{yy}^{(m)} + q(x,y)\omega^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad m \in Z, \tag{7}$$

$$\omega^{(m)}(0,y,t) = e^{imy}\delta(t), \ \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial x}(0,y,t) = 0, \tag{8}$$

$$u^{(m)}|_{y=\pi} = u^{(m)}|_{y=-\pi}. \tag{9}$$

Задача Коши (7)–(9) с данными на времениподобной поверхности не является корректно-поставленной в классе функций конечной гладкости. Однако, возможно доказать однозначную разрешимость обратной задачи, используя подход Л. Гиренберга, Л. Овсянникова.

Решение задачи (7)–(9) по формуле Даламбера имеет следующий вид:

$$\omega^{(m)}(x,y,t) = \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,y,t)} q(\xi,y)\omega(\xi,y,\tau)d\xi d\tau, \tag{10}$$

где

$$\Delta(x,y,t) = \{(\xi,y,\tau) : 0 < \xi \le x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi\}$$

– треугольник, образованный характеристиками, проходящими через точку (x,y,t), и осью t.

Нетрудно показать, что

$$\omega^{(m)}(x,y,t) \equiv 0, \quad 0 < x <\equiv |t|. \tag{11}$$

Поэтому фактической областью интегрирования в уравнении (10) для точек $(x,y,t) \in D = \{(x,y,t) : x \ge |t|\}$ будут прямоугольники $\Delta(x,y,t) \in D = \{(x,y,t) : |\tau| \le \xi \le x - |t-\tau|\}$, образованные характеристиками, выходящими из точек $(0,y,0), (x,y,t)$.

Обозначим

$$\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,t) = \omega^{(m)}(x,y,t) - \frac{1}{2}e^{imy}[\delta(x-t) + \delta(x+t)]. \tag{12}$$

Кусочно-непрерывная функция $\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,t)$ есть решение уравнения

$$\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,t)=\frac{h(y)}{4}\theta(x-|t|)\left[\int\limits_0^{\frac{x+t}{2}}q(\xi,y)d\xi+\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}q(\xi,y)d\xi\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_{\Delta(x,y,t)}q(\xi,y)\widetilde{\omega}(\xi,y,\tau)d\xi d\tau,\ x>0. \tag{13}$$

Чтобы вычислить $\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,x-0)$, в (13) надо положить $t=x$, тогда

$$\int\limits_0^{\frac{x-t}{2}}q(\xi,y)d\xi=0$$

и

$$\iint\limits_{\Delta(x,y,t)}q(\xi,y)\widetilde{\omega}(\xi,y,\tau)d\xi d\tau=0,$$

т.к. $\Delta(x,y,t)$ превращается в отрезок при каждом фиксированном y.

Таким образом,

$$\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,x-0)=\frac{h(y)}{4}\int\limits_0^x q(\xi,y)d\xi,\ x>0. \tag{14}$$

Продолжим нечетным образом функции $u^{(k)}(x,y,t)$ и $f^{(k)}(y,t)$ по переменной t.

Очевидно, что

$$u^{(k)}(x,y,t)=\int\limits_R f^{(k)}(y,s)\omega^{(m)}(x,y,t-s)ds=$$

$$=\int\limits_R\left(\sum_{m=1}^{\infty}f_m^{(k)}(t)e^{imy}\right)\omega^{(m)}(x,y,t-s)ds=$$

$$\int\limits_R \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)e^{imy}\right)\omega^{(m)}(x,y,s)ds =$$

$$= \int\limits_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\omega^{(m)}(x,y,s)ds$$

при $x>0, y \in R$ и $k \in Z$. Здесь $f_m^{(k)}(t)$ – коэффициенты Фурье функции $f_m^{(k)}(y,t)$ при $\omega^{(m)} = e^{imy}\delta(t)$:

$$u^{(k)}(0,y,t) = \int\limits_R f^{(k)}(y,s)\omega^{(m)}(0,y,s)ds = \int\limits_R f^{(k)}(y,s)e^{imy}\delta(t-s)ds =$$

$$= \int\limits_R \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(s)e^{imy}\right)e^{imy}\delta(t-s)ds = \int\limits_R f_m^{(k)}(s)\delta(t-s) = f_m^{(k)}.$$

В уравнении (1) обратной задачи (1)–(4) выражение $q \cdot u$ запишем следующим образом:

$$q \cdot u = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ijy},$$

$$q(x,y) \cdot u^k(x,y,t) = \int\limits_R \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(t)e^{ijy}\right)\omega^{(m)}(x,y,t-s)ds =$$

$$= \int\limits_R \sum_{m=1}^{\infty} b_j(t-s)\omega^{(m)}(x,y,s)ds.$$

Решение задачи (1), (4) может быть представлено в виде

$$u^{(k)}(x,y,t) = \int\limits_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\omega^{(m)}(x,y,s)ds. \tag{15}$$

Используя (6), получим

$$u^{(k)}(x,y,t) = \int\limits_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\{e^{imy}(\delta(x+t)+\delta(x-t))\} + \widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,s)ds.$$

Преобразуем формулу (15):

$$u^{(k)}(x,y,t) = \frac{1}{2}\Big[f^{(k)}(y,t+x)+f^{(k)}(y,t-x)\Big]+\int\limits_{-x}^{x}\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,s)ds.$$

При $x > |t|$ имеем

$$\frac{1}{2}\Big[f^{(k)}(y,t+x)+f^{(k)}(y,t-x)\Big]+\int\limits_{-x}^{x}\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s)\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,s)ds = 0. \quad (16)$$

При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (16) является интегральным уравнением Гельфанда-Левитана первого рода относительно функции $\widetilde{\omega}^{(m)}(x,y,t),\ t \in (-x,x)$.

После дискретизации уравнения на сетке и аппроксимации интегрального оператора по кадратурным формулам задача (16) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с симметричной матрицей. Так как уравнение (16) относится к классу некорректно поставленных задач, то СЛАУ, возникающая в результате дискретизации уравнения, является плохо обусловленной и преобразуется к виду

$$f_\gamma^{(k)}(\mu E + A^{(k)})\widetilde{\omega} = f_\gamma^{(k)}$$

где μ – параметр регуляризации.

Для решения уравнения (17) используются прямой метод квадратного корня и итерационные методы регуляризации. Численная реализация и распараллеливание итерационных методов и метода квадратного корня для решения двумерной коэффициентной обратной задачи выполнены с помощью библиотеки MPI на языке Фортран.

Распараллеливание итерационных методов градиентного типа [4] основано на разбиении матрицы $A^{(k)}$ горизонтальными полосами на m блоков, а вектора решения z и векторов правой части $f_\gamma^{(k)}$ СЛАУ – на m частей так, что $n = m \times L$, где n – размерность системы уравнений, m – число процессоров, L – число строк матрицы в блоке.

Распараллеливание метода квадратного корня, предложенного в работе [5]. Матрица $A^{(k)}$ разбивается вертикальными линиями на m блоков.

Диагональные элементы треугольной матрицы S. Обратный ход метода квадратного корня (нахождения СЛАУ) по рекуррентным формулам также выполняется на одном процессоре.

Литература

1 Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. – Екатеренбург: Наука, 1993. – 262 с.

2 Акимова Е.Н. Параллельные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на МВС-1000. // Вестник Нижегор. унив. им. Н.И. Лобачевского. – 2009. – № 4. – С. 181-189.

3 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сиб. научн. изд. 2009. – 457 с.

Статья поступила в редакцию 30.09.2016

Темирбекова Л.Н. ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШIН КӨПӨЛШЕМДI КОЭФФИЦИЕНТТIК КЕРI ЕСЕПТЕРДI ШЕШУДIҢ ПАРАЛЛЕЛЬ АЛГОРИТМДЕРI

Гиперболалық теңдеу үшiн екiөлшемдi коэффициенттiк керi есептi шешуге арналған параллель тура және итерациялық алгоритмдер қарастырылған.

Temirbekova L.N. PARALLEL ALGORITHMS FOR SOLVING MULTIDIMENSIONAL COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

In this article we used parallel direct and iterative algorithms to solve two-dimensional coefficient inverse problem for hyperbolic equation.